SF1624 Algebra och geometri

Fjortonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

19 november, 2009

Linjära ekvationssystem och determinanter

För kvadratiska matriser kan vi använda determinanten för att karaktärisera lösningsmängden till $A\overline{x} = \overline{b}$.

Sats

Låt A vara en kvadratisk matris. Då gäller att

- $A\overline{x} = \overline{b}$ *har en unik lösning för varje* $\overline{b}$ *precis om* $\det(A) \neq 0$.
- *Det homogena systemet,* $A\overline{x} = 0$, *har icke-triviala lösningar precis då* $\det(A) = 0$.

Bevisidé.

Vi har unik lösning till varje högerled $\Leftrightarrow$ reducerade trappstegsformen av A är I $\iff$ reducerade trappstegsformen för A saknar nollrader $\iff$ $\det(A) \neq 0$.
Det homogena systemet har icke-triviala lösningar precis om vi behöver införa parametrar vid lösningen, dvs precis om den reducerade trappstegsformen inte är I. $\square$

Om determinanten är noll

Sats

Om A är en kvadratisk matris och $\det A = 0$ *har vi antingen*

- $A\overline{x} = \overline{b}$ *har oändligt många lösningar*

eller

- $A\overline{x} = \overline{b}$ *saknar lösningar.*

Bevisidé.

Om $\det A$ är den reducerade trappstegsformen för A inte I och vi får antingen en ledande etta i högerledet i den recucerade totalmatrisen eller en lösningsmängd med minst en parameter. $\square$

Notera

Det finns lösningar precis om $\overline{b}$ är en linjärkombination av kolonnerna i A. Om dessa är linjärt beroende finns flera linjärkombinationer som ger $\overline{b}$.

Homogen lösning och partikulärlösning

För ett linjärt ekvationssystem

$$A\overline{x} = \overline{b} \tag{1}$$

kan lösningen skrivas som

$$\overline{x}_p + \overline{x}_h$$

där x_p är någon lösning till (1) – en *partikulärlösning* – och $\overline{x}_h$ är lösningen till det homogena systemet

$$A\overline{x} = 0.$$

Denna kallas den *homogena lösningen* till (1) och innehåller alla parametrar.
Lösningen x_h kallas homogen eftersom varje multipel av en homogen lösning också är en homogen lösning – den homogena lösningen är sluten under multiplikation med skalär.

Uppgifter

Vi ska se på ett par av de rekommenderade uppgifterna från kursboken (Linkär algebra och geometri av L. Andersson mfl.)

Uppgift (5.1)

a) För vilka värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 3 \\ ax_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

en unik lösning, respektive ingen lösning?

b) De tre ekvationerna kan tolkas som ekvationerna för tre plan. För vilka värden på a skär de varandra längs en linje?

Uppgifter, forts.

Uppgift (5.2)

För vilka värden på a och b har följande ekvatinssystem en unik lösning? Bestäm lösningen i dessa fall.

a)

$$\begin{cases} ax + by = d_1 \\ bx + ay = d_2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} ax + by = d_1 \\ a^2x + b^2y = d_2 \end{cases}$$